ENS de Lyon
L3

Algèbre 1
2024-2025

TD 5 : Quotient et dualité

Les exercices marqués d'un seront corrigés en TD, si le temps le permet.

Dans tout le TD, K désigne un corps quelconque.

Exercices importants

Exercice 1.

Donner un exemple de K-espace vectoriel E et de sous-espace vectoriel F de E où :

1. $\dim(F)$ est finie et $\dim(E/F)$ est infinie.
2. $\dim(F)$ est infinie et $\dim(E/F)$ est finie.
3. $\dim(F)$ est infinie et $\dim(E/F)$ est infinie.

Exercice 2. (Théorèmes d'isomorphisme)

Soient E un K-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriel de E. On note $\pi : E \to E/F$ la projection canonique.

1. Montrer que l'application $G \mapsto \pi(G)$ induit une bijection croissante entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant F, et l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E/F. Quelle est sa bijection réciproque ?
2. Construire un isomorphisme entre $F/(F \cap G)$ et $(F+G)/G$.
3. On suppose que $F \subset G$. Montrer que G/F s'identifie à un sous-espace vectoriel de E/F et construire un isomorphisme entre $(E/F)/(G/F)$ et E/G.

Exercice 3. (Changement de base duale)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $e = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $f = (f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux bases de E, et $e^* = (e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $f^* = (f_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ leurs bases duales respectives. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de e à f.

1. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on écrit $e_j^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} f_i^*$, avec $\alpha_{i,j} \in K$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.
   Déterminer $A' = (\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en fonction de A.
2. En déduire la matrice de passage de e^* à f^* en fonction de A.

Exercice 4. (Bases antéduales)

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une base de E^* et $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ sa base duale de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
   Montrer qu'à travers l'identification $E^{**} \cong E$, la base $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*)$ s'identifie à une base de E dont la base duale est $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On appelle cette base la base antéduale de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
2. Soit $E = K_n[X]$ le K-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soient $a_0, \dots, a_n$ des éléments distincts de K.

(a) Montrer que les formes linéaires

$$\mathrm{ev}_{a_i} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ P & \longmapsto & P(a_i) \end{array} \right.$$

forment une base de E^*.

(b) Déterminer la base antéduale de la base $(\mathrm{ev}_{a_0}, \dots, \mathrm{ev}_{a_n})$.

Exercice 5.

1. Soit I un ensemble et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de K-espaces vectoriels. Pour tout $i \in I$, on note $s_i : E_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ l'application canonique. Soit F un K-espace vectoriel. Montrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K\left(\bigoplus\limits_{i\in I} E_i, F\right) & \longrightarrow & \prod\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_K(E_i, F) \\ f & \longmapsto & (f \circ s_i)_{i\in I} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels. En déduire un isomorphisme

$$\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)^* \cong \prod_{i\in I} E_i^*.$$

2. Soit $E = K[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n^* l'application linéaire vérifiant $e_n^*(X^n) = 1$ et $e_n^*(X^i) = 0$ pour tout $i \neq n$. Montrer que $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base de E^*, bien que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base de E.

3. Montrer que E^* est isomorphe à $K^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6.

Pour tout $A \in M_n(K)$, on définit la forme linéaire $\lambda_A \in M_n(K)^*$ par $\lambda_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Montrer que l'application $\lambda : M_n(K) \to M_n(K)^*$ définie par $A \mapsto \lambda_A$ est un isomorphisme.

2. Soit $\mu \in M_n(K)^*$ telle que $\mu(AB) = \mu(BA)$ pour tous $A, B \in M_n(K)$. Montrer que μ est proportionnelle à la trace.

3. Démontrer que si $n \geqslant 2$, tout hyperplan de $M_n(K)$ contient une matrice inversible.

Exercice 7. (Formes linéaires et hyperplans)

Soit E un K-espace vectoriel.

1. (a) Pour F un sous-espace vectoriel de E, expliciter un isomorphisme $(E/F)^* \cong F^\perp$.

(b) En déduire que si $H_1, \dots, H_p$ sont des hyperplans de E, alors $\bigcap\limits_{i=1}^{p} H_i$ est de codimension au plus p.

2. Soient $f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires de E et soit $f \in E^*$.

(a) Montrer que si $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ alors $\bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker(f_i) \subset \ker(f)$.

(b) On suppose réciproquement que $F := \bigcap\limits_{i=1}^{p} \ker(f_i)$ est inclus dans $\ker(f)$. Justifier que les f_i et f induisent des formes linéaires $\overline{f}_i$ et $\overline{f}$ sur E/F.

(c) En déduire que $f \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

3. Énoncer un cas d'égalité pour le résultat de la question **1.(b)**.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E de codimension p. Montrer que F est l'intersection de p hyperplans.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. (Naturalité)

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, et soit f une application linéaire de E dans F. On note τ_E (resp. τ_F) l'application canonique $E \to E^{**}$ (resp. $F \to F^{**}$). Montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau_E} & E^{**} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}^{tt}f} \\ F & \xrightarrow{\tau_F} & F^{**} \end{array}$$

commute, c'est-à-dire que l'on a $\tau_F \circ f = {}^{tt}f \circ \tau_E$.

Exercice 9. (Zornettes)

Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On dit qu'un sous-ensemble J de I est une *chaîne* de I si l'ordre de I se restreint en un ordre total sur J. On dit que $(I, \leqslant)$ est *inductif* si toute chaîne de I admet un majorant.

Pour cet exercice, on admet l'énoncé suivant (appelé lemme de Zorn) :

Si $(I, \leqslant)$ est un ensemble ordonné inductif,
alors I admet un élément maximal pour $\leqslant$.

Le but de cet exercice est de montrer quelques conséquences de cet énoncé en algèbre linéaire. Soit E un K-espace vectoriel.

1. **(a)** Montrer que l'ensemble des familles libres de E est inductif. Montrer qu'une famille libre maximale est une base de E.
   (b) Montrer le théorème de la base incomplète : Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E, et $\mathcal{G} \supset \mathcal{L}$ une famille génératrice. Il existe une famille $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F admet un supplémentaire dans E.
3. Montrer que l'application de bidualité $\tau : E \to E^{**}$ est injective.
4. Montrer qu'il existe un morphisme de groupe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $x \mapsto ax$.

Exercice 10. (Suites exactes et quotients)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(E_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une suite de K-espaces vectoriels et soit pour chaque $i \in [\![0, n-1]\!]$ une application linéaire $f_i : E_i \to E_{i+1}$. On représente visuellement une telle suite par le diagramme

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n.$$

On dit que la suite est *exacte* si pour chaque $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$. On appelle *suite exacte courte* une suite exacte de la forme

$$0 \to F \to E \to G \to 0.$$

1. **(a)** Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'on a une suite exacte courte $0 \to F \to E \to E/F \to 0$.
   (b) Réciproquement, montrer que si on a une suite exacte courte $0 \to F \to E \to G \to 0$, alors F s'identifie à un sous-espace vectoriel de E, et que G est canoniquement isomorphe à E/F.
2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Montrer que l'on a une suite exacte $0 \to \ker(f) \to E \xrightarrow{f} F \to F/\mathrm{Im}(f) \to 0$. L'espace vectoriel $F/\mathrm{Im}(f)$ s'appelle le *conoyau* de f, noté $\mathrm{coker}(f)$.